التكاملات الثنائية دكارتيا

د. منير الترك

رياضيات 3

التكاملات الثنائية

ليكن لدينا التابع $z = f(x,y)$ تابع مستمرا ومعرفا على المنطقة المغلقة D نقسم المنطقة D الى N من الأجزاء بطريقة ما

نكرر العملية N مرة ونجعل $n \to \infty$

نقسم المنطقة D الى N من الأجزاء بطريقة ما ونسميها Δs_i نلاحظ أن $dA = dxdy$

وهي مساحة القطعة الصغيرة والتي هي مسقط Δs_i

إذا ضربنا dA بالارتفاع z فإننا نحصل على حجم هذا الموشور الصغير ونرمز له $dv = zdxdy$

إذا كررنا هذه العملية n مرة ثم أخذنا

مجموع المواشير الصغيرة وجعلنا $n \to \infty$ و

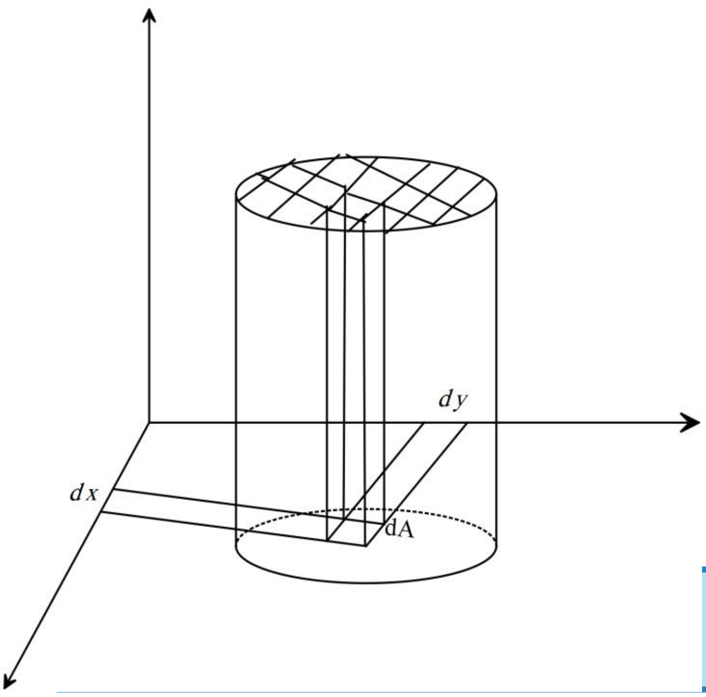
بالتالي $\Delta s_i \to 0$

وفرضنا أن هذه النهاية مستقلة عن الطريقة التي

نقسم فيها المنطقة D فان هذه النهاية تسمى التكامل

الثنائي $z = f(x,y)$ على المنطقة D ونرمز الى ذلك

بالشكل:



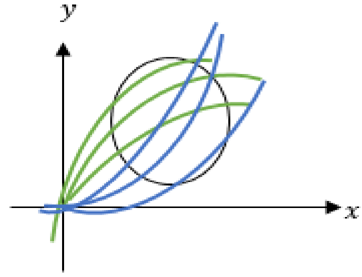
$$\iint_D f(x,y)d(x)d(y)$$

ونسمي المنطقة D بساحة التكامل

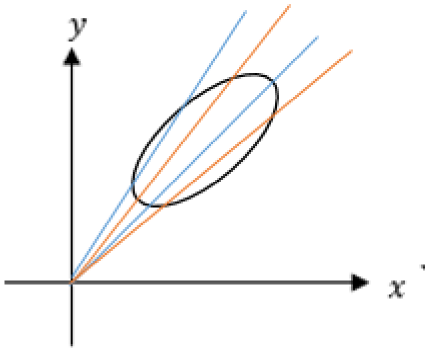
حساب التكامل الثنائي:

كيف نحسب التكامل الثنائي باستخدام التعريف ؟؟؟؟

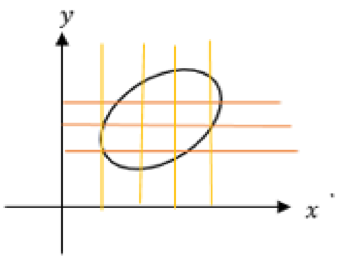
إن استخدام التعريف لحساب التكامل الثنائي أمر صعب بل هو مستحيل إذ أن تقسيم المنطقة D الى مناطق صغيرة ثم ضرب مساحة القيمة الصغيرة بقيمة تابع عند منطقة ما من كل نقطة ثم جمع النواتج ثم أخذ النهاية كل هذا يقودنا الى السؤال نقسم المنطقة D؟ هل نقسمها بطريقة عشوائية أم بطريقة منظمة،بواسطة مستقيمات موازية للمحاور الاحداثية أم نقسمها بواسطة مستقيمات منبثقة من O أو بدوائر مركزها مبدا الاحداثيات. بالنتيجة فان كل طريقة تقسم D الى مناطق جزئية صغيرة تقودنا للحساب وجميع الطرق تؤدي لنفس النتيجة



دوائر متقاطعة مركزها المبدأ

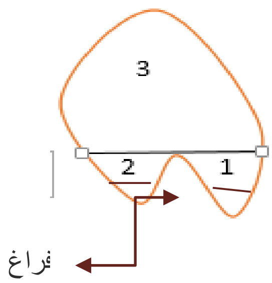


المستقيمات المنبثقة عن المبدأ



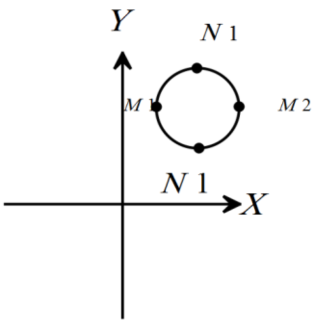
مستقيمات توازي المحاور الاحداثية

وربما نعترض بعض المشاكل وهي أن نكون بعض الصفوف ناقصة كما في الشكل التالي:



لذلك نستورد التعريف التالي: نقول عن منطقة أنها بسيطة باتجاه ox إذا كان أي مستقيم باتجاه ox ومارا من المنطقة D فانه يقطع هذه المنطقة من نقطتين M_1, M_2 فقط

وتكون المنطقة بسيطة بالنسبة ل oy إذا كان أي مستقيم يوازي oy ويقطع المنطقة من نقطتين N_1, N_2 فقط



ونقول عن منطقة أنها بسيطة بالاتجاهين إذا تحقق الشرطين معا

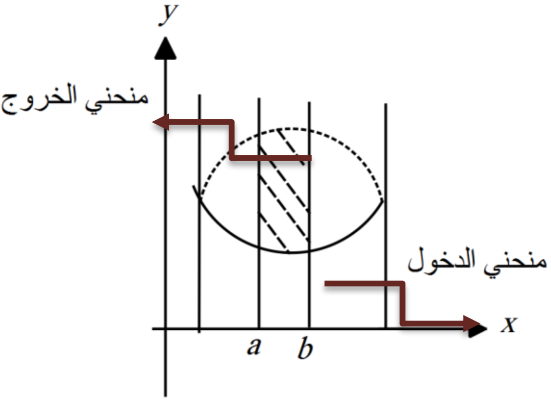
يمكن أن نسمي هذا الشرح للمنحني الذي يحيط بالمنطقة بأن هذا المنحني أملس

(صقيل) إذا العملية الأولى هي تحديد منطقة التكامل

ملاحظة:

يمكن أن نقسم أي منطقة غير بسيطة الى عدة مناطق بحيث يجعل هذا التقسيم كل قسم من هذه المنطقة عبارة عن منطقة بسيطة كما في المشكلة التي واجهتنا في الشكل السابق حيث قمنا بتقسيم الشكل الى ثلاثة أقسام ليجعل منه منحني بسيط

حساب التكامل الثنائي على منطقة بسيطة:



لنحدد أولا هذه المنطقة على ox

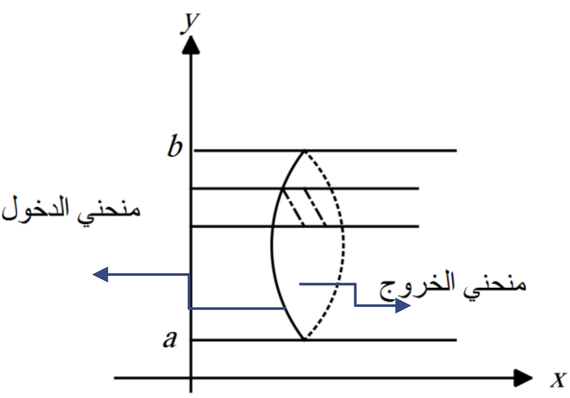
نأخذ شريحة من هذه المنطقة توازي oy ونقسم المنحني الذي

يحيط بالمنطقة الى قسمين كما في الشكل:

نسمي المنحني السفلي منحني دخول ونسمي المنحني العلوي

منحني الخروج والاتجاه دائما من الأسفل الى الأعلى كما ونسمي

منحني الدخول y_1 ونسمي منحني الخروج y_2 ومن الواضح أن x محصورة بين a,b أما y فهي متغيرة بين منحني الدخول ومنحني الخروج



نكامل باعتبار ان x ثابتة وy هي المتغيرة

$$I = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)d(y) \right] d(x)$$

ويمكن أيضا أن نأخذ شريحة موازية للمحور ox كما في الشكل و

عندها نثبت المحور oy بين النقطتين a,b لمنحني الدخول $x_1(y)$

ومنحني الخروج $x_2(y)$

أي أن هناك خياران لإتمام التكامل وعلينا اختيار الاسهل والنتيجة

سوف تكون نفسها

$$I=\int_a^b\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)d(x)\right]d(y)$$

أمثلة:

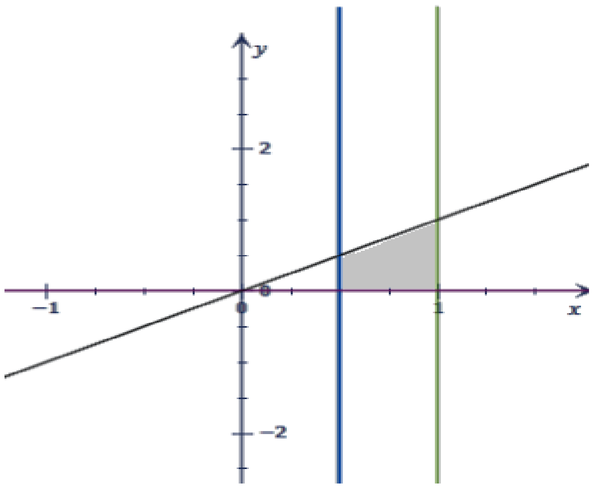
المثـال الأول:

احسب قيمة التكامل الثنائي:

$$I=\iint_D e^{\frac{x+y}{x}}d(x)d(y)$$

علما أن:

$$D\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\x=1\\y=0\\y=x\end{cases}$$



أولا نرسم المنطقة

لناخذ الخيار الأسهل وهو أن نثبت x **بين**

النقطتين $x=\frac{1}{2}$ **و** $x=1$

ونأخذ شريحة توازي oy **كما في الشكل ثم ندخل من المنحني** $y=0$ **ونخرج من المنحني** $y=x$ **ونكتب التكامل على الشكل التالي**

.

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\int_{Y=0}^{Y=X}e^{\frac{x+y}{x}}d(y)\right]d(x)$$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\int_{0}^{y=x}e.e^{\frac{y}{x}}d(y)\right]d(x)$$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[e.x.e^{\frac{y}{x}}\right]_{y=0}^{y=x}d(x)$$

$$I=e\int_{\frac{1}{2}}^{1}(e-1)xd(x)=e(e-1)\int_{\frac{1}{2}}^{1}xd(x)$$

$$I=e^{\frac{1}{2}}(e-1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=e(e-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)$$

$$I=\frac{3}{8}e(e-1)$$

المثال الثاني:

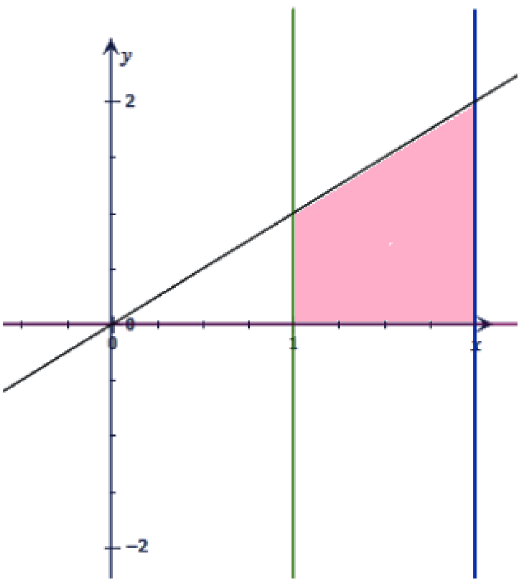
$$I=\iint\limits_{D}\frac{x^2+y}{x}d(x)d(y)$$

علما أن :
$$D=\begin{cases}1\leq x\leq 2\\0\leq y\leq x\end{cases}$$

الحل:

نأخذ شريحة توازي oy وتثبت x فيكون:

$$I=\int_{1}^{2}\left[\int_{Y=0}^{Y=x}\frac{x^2+y}{x}d(y)\right]d(x)$$



$$I=\int_1^2\left[xy+\frac{y^2}{2x}\right]_0^x d(x)$$

$$I=\int_{1}^{2}\left[x^2+\frac{x}{2}\right]d(x)=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$I=\frac{8}{3}+1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{3}-\frac{7}{12}=\frac{37}{12}$$

المثال الثالث

$$I = \iint_D (x^2y + y + 1)d(x)d(y)$$

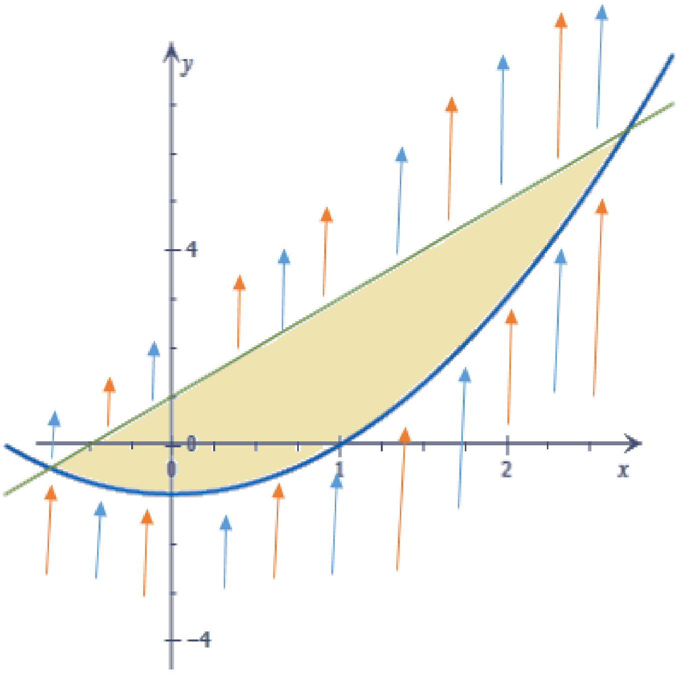
حيث أن D هي المساحة المحصورة بين المنحنيين: $y_2 = 2x + 1$ و $y_1 = x^2 - 1$

<u>الحل</u>

واضح من الشكل أنه علينا تثبيت x وتغيير y حيث نعتبر

أن القطع المكافئ هو منحني الدخول والمستقيم

هو منحني الخروج لنوجد نقاط التقاطع بين القطع والمستقيم:



$$x^2 - 1 = 2x + 1$$
$$x^2 - 2x - 2 = 0$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$
$$x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$I = \int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} \left[\int_{x^2-1}^{2x+1} (x^2y + y + 1)d(y)\right] d(x)$$

$$\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y\right]_{x^2-1}^{2x+1} d(x)$$

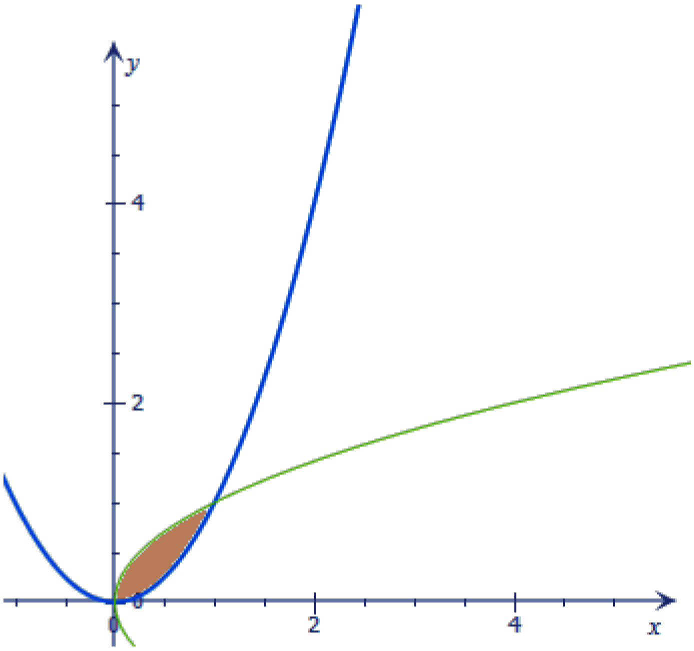
$$I = \int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} \frac{x^2}{2}\{(2x+1)^2 - (x^2-1)^2\} + \frac{1}{2}\{(2x+1)^2 - (x^2-1)^2\} + (2x+1) - (x^2-1)d(x)$$

ونتابع الحل لنحصل على المساحة المطلوبة

<u>**المثال الرابع**</u>

$$I = \iint_D (y^2 + x)d(x)d(y)$$

حيث أن D هي المنطقة المحصورة بين القطعين المكافئين



$$y = x^2$$
$$y^2 = x$$

الحل:

نوجد نقط التقاطع بين القطعين عن طريق الحل المشترك

لهما فتكون النقطة الأولى $(0,0)$ والنقطة الثانية $(1,1)$

نثبت x بين 0 و 1 ويكون:

$$I = \int_0^1 \left[\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} (y^2 + x)d(y)\right] d(x)$$

$$I = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} + xy\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} d(x)$$

$$I = \int_0^1 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + x^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{X^6}{3} + X^3\right)\right] d(x) = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{6}{3}} - x^3\right) d(x)$$

تنابع الحل لنحصل على المساحة المطلوبة وهي $I = \frac{33}{140}$

مسألة:

احسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات التالية:

$$x + y = 6$$
$$x = y^2$$
$$y = x^2$$

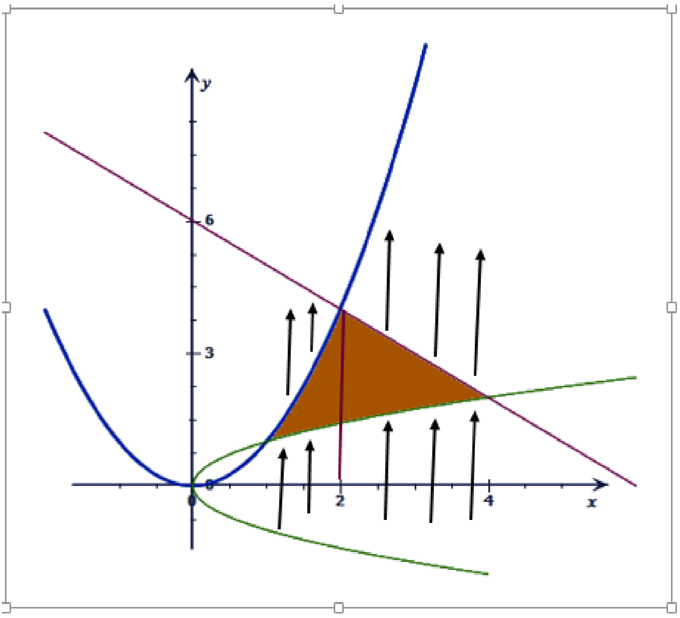
ملاحظة:

ان التابع الذي يدل على مساحة المنطقة D يعطى بالعلاقة: $\iint_D d(x)d(y)$

علينا تقسيم المنطقة الى منطقتين حتى يصبح لدينا تكامل بسيط لذلك علينا إيجاد نقطة التقاطع بين القطع الأول مع المستقيم والقطع الثاني مع المستقيم

$$x + y = 6$$
$$y = x^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Longrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = -3 & \text{ليست موجودة ضمن المساحة المطلوبة} \\ x = 2 & \text{و هي المطلوبة} \end{cases}$$

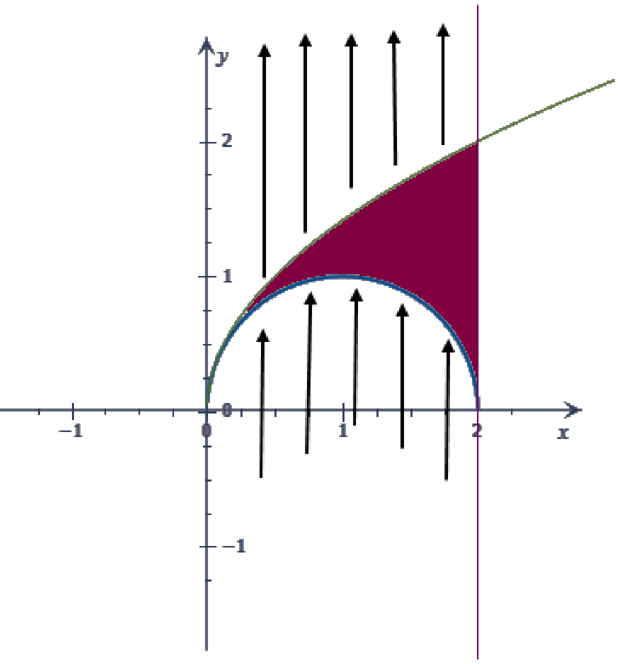


$$x + y = 6$$
$$y^2 = x$$
$$y^2 + y - 6 = 0 \Longrightarrow (y+3)(y-2) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = -3 & \text{ليست موجودة ضمن المساحة المطلوبة} \\ y = 2 & \text{و هي المطلوبة} \end{cases}$$
$$\Rightarrow x = 4$$

$$I_1 = \int_1^2 \left[\int_{y=\sqrt{x}}^{y=x^2} d(y)\right] d(x)$$
$$\int_1^2 (x^2 - \sqrt{x}) d(x)$$
$$I_1 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)$$
$$I_1 = 2 + \frac{1}{3}$$
$$I_2 = \int_2^4 \left[\int_{y=\sqrt{x}}^{y=6-x} d(y)\right] d(x)$$
$$I_2 = \int_2^4 (6 - x - \sqrt{x}) d(x)$$

نتابع الحل فنجد $I_2 = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\right]_2^4$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{11}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}$$



تمرين (1)

اكتب فقط حدود التكامل للتكامل الثنائي التالي

$$I = \iint_D f(x,y)d(x)d(y)$$

$$D = \begin{cases} y = \sqrt{2ax - x^2} \\ y = \sqrt{2ax} \\ y = 2a \end{cases}$$

نربع المعادلة الأولى فيكون:

$$y^2 + x^2 - 2ax = 0$$

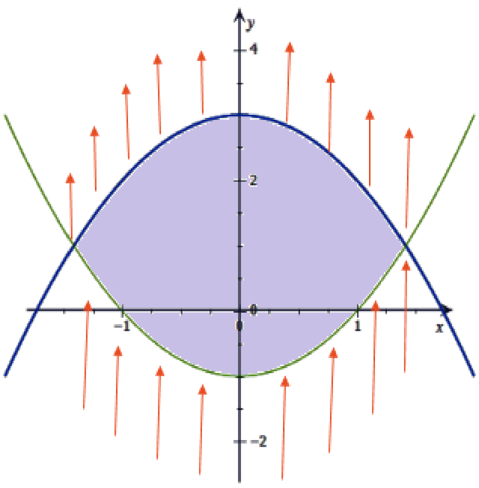
نضيف ونطرح مربع نصف أمثال x: $y^2 + (x-a)^2 = a^2$

وهي عبارة عن معادلة دائرة نصف قطرها a ومركزها $(a,0)$

أما المعادلة الثانية فهي تعبر عن قطع مكافئ ومن هذا نجد أن:

$$I = \iint_D f(x,y)d(x)d(y)$$

$$I = \int_0^{2a}\left[\int_{y=\sqrt{2ax-x^2}}^{y=\sqrt{2ax}} f(x,y)d(y)\right]d(x)$$



تمرين (2)

اكتب فقط حدود التكامل:

$$I = \iint_D f(x,y)d(x)d(y)$$

$$D = \begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

لنوجد نقط التقاطع وذلك بالحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$3 - x^2 = x^2 - 1$$
$$2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\int_{y=x^2-1}^{y=3-x^2} d(y) \right] d(x)$$

الوظيفة: احسب قيمة التكامل الثنائي

$$I = \iint_D (2 - x - 2y) d(x) d(y)$$

$$D = \begin{cases} 2y = x \\ 2y + x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

الجواب النهائي: $I = \frac{1}{3}$

مسألة (1):

ليكن لدينا السطح:

$$S \equiv X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X + 4Y - 6Z + 5 = 0$$

والمستوي:

$$P \equiv X + \gamma Y + \mu Z + 1 = 0$$

والمطلوب: عين γ و μ حتى تكون النقطة (2,-1,1) مركز دائرة تقاطع S مع P

مسألة (2):

ليكن لدينا الهرم الذي رؤوسه: A(0,0,0) , B(1,2,3) , C(4,-1,1) , D(-3,1,-2)

والمطلوب:

- أوجد المعادلات الوسطية للحرف BC
- أوجد بعد A عن الوجه BCD
- أوجد الزاوية بين ABC،ABD

مسألة (3):

برهن أن المستقيم $L \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y - z + 7 = 0 \end{cases}$

يمس الكرة التي معادلتها $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z = 8$